ex 33 A $f(x) = \ln(2x+5)$, $n=5$, $a=0$, $I=[-2;2]$

a) $f'(x) = \frac{2}{2x+5} \Rightarrow f'(0) = \frac{2}{5}$

$f''(x) = 2\frac{(-2)}{(2x+5)^2} \Rightarrow f''(0) = 2\frac{(-2)}{5^2} = \frac{-4}{25}$

$f'''(x) = 2\cdot 2\cdot \frac{2(2x+5)\cdot 2}{(2x+5)^4} = 2^3\cdot\frac{2}{(2x+5)^3} \Rightarrow f'''(0) = \frac{2^4}{5^3} = \frac{16}{125}$

$f^{(4)}(x) = 2^4\left(-\frac{3(2x+5)^2\cdot 2}{(2x+5)^6}\right) = 2^4\frac{(-2\cdot 3)}{(2x+5)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -\frac{96}{625}$

$f^{(5)}(x) = \dots = \frac{2^5\cdot 4!}{(2x+5)^5} \Rightarrow f^{(5)}(0) = \frac{2^5\cdot 4!}{5^5} = \frac{768}{3125}$

$\left(\text{rem: } f^{(n)}(x) = \frac{2^n(n-1)!}{(2x+5)^n}(-1)^{n+1}\right)$

donc : Dev. McLaurin d'ordre 5 (= dév. de Taylor avec a = 0)

$\ln(2x+1) = \ln(5) + \frac{2}{5}x - \frac{4}{25}\frac{x^2}{2} + \frac{16}{125}\frac{x^3}{6} - \frac{96}{625}\frac{x^4}{4!} + \frac{768}{3125}\frac{x^5}{5!} + R_5(x)$

$= \ln(5) + \frac{2}{5}x - \frac{2x^2}{25} + \frac{8}{375}x^3 - \frac{4}{625}x^4 + \frac{32}{15625}x^5 + R_5(x)$

c) Déterminons M t.q. : $|f^{(6)}(x)| \le M \Leftrightarrow \left|\frac{2^6\, 5!}{(2x+5)^6}(-1)^7\right| \le M \Leftrightarrow \frac{2^6\cdot 5!}{(2x+5)^6} \le M$

on travaille dans $[-2;2]$, donc on a : $-2 \le x \le 2$

$1 \le (2x+5) \le 9$

$1 \le (2x+5)^6 \le 9^6$

$1 \ge \frac{1}{(2x+5)^6} \ge \frac{1}{9^6}$

et donc : $\left|\frac{2^6\cdot 5!}{(2x+5)^6}\right| \le \underbrace{2^6\cdot 5!}_{M}$

ainsi : $|R_5(x)| \le \frac{M}{6!}|x|^6 = \frac{2^6\cdot 5!}{6!}x^6 = \frac{32}{3}x^6 \quad \forall x \in [-2;2]$

Cf illustration geogebra...

ex 33 B $f(x)=\frac{1}{x^2}+4$, $n=4$, $a=-2$, $I=[-3;-1]$

a) $f'(x)=-2/x^3$ $\quad f'(-2)=1/4$

$f''(x)=6/x^4$ $\quad f''(-2)=3/8$

$f'''(x)=-24/x^5$ $\quad f'''(-2)=3/4$

$f^{(4)}(x)=120/x^6$ $\quad f^{(4)}(-2)=15/8$

donc dév. de Taylor en $a=-2$:

$$P_4(x)=f(-2)+f'(-2)(x+2)+f''(-2)\frac{(x+2)^2}{2!}+f'''(-2)\frac{(x+2)^3}{3!}+f^{(4)}(-2)\frac{(x+2)^4}{4!}+R_4(x)$$

$$=\frac{17}{4}+\frac{1}{4}(x+2)+\frac{3}{16}(x+2)^2+\frac{3}{8}(x+2)^3+\frac{5}{64}(x+2)^4+R_4(x)$$

c) Déterminons M t.q. $|f^{(5)}(x)|\le M \Leftrightarrow \left|-\frac{720}{x^7}\right|\le M \Leftrightarrow \frac{720}{|x^7|}\le M$ sur $[-3;-1]$

càd $-3\le x\le -1 \Leftrightarrow 1\le |x|\le 3 \Leftrightarrow 1\le |x|^7\le 3^7$

$\Leftrightarrow 1\ge \frac{1}{|x|^7}\ge\frac{1}{3^7} \Leftrightarrow \underbrace{720}_{M}\ge\frac{720}{|x|^7}\ge\frac{720}{3^7}$

on prend $M=720=6!$

et on a : $|R_4(x)|\le\frac{M}{5!}|x+2|^5=\frac{6!}{5!}|x+2|^5=6|x+2|^5$

cf Illustration avec Geogebra...

ex 34 $f(x)=\ln(x)$ en $a=1$

d°1 : $P_1(x)=f(1)+f'(1)\cdot(x-1)=x-1$

d°2 : $P_2(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}$

d°3 : $P_3(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}$

d°4 : $P_4(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}$

d°5 : $P_5(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}$

ex 35 a) $f(x)=\frac{1}{4x}=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(5)\frac{(x-5)^n}{n!}=\dots=\frac{1}{20}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-5)^n}{5^n}$

b) $f(x)=\cos(2x)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}=\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2k-1}$